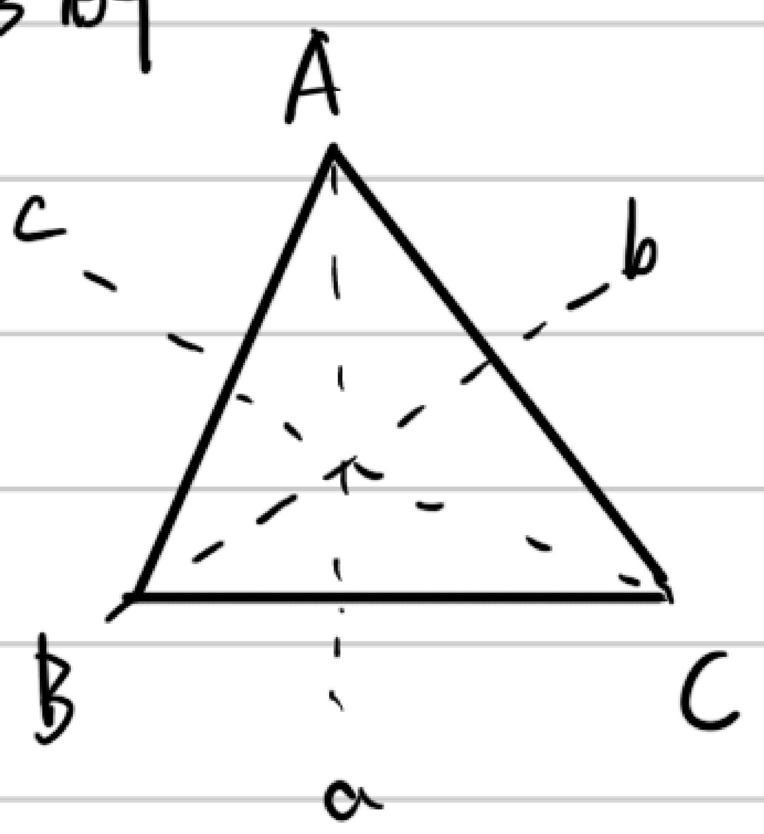
D_3群



$d^2=f$，$df=e$，$a^2=b^2=c^2=e$

$ad=b$，$bd=c$，$cd=a$

$da=c$，$db=a$，$dc=b$

$af=c$，$bf=a$，$cf=b$

$fa=b$，$fb=c$，$fc=a$

d：逆时针转 $\frac{2\pi}{3}$

f：逆时针转 $\frac{4\pi}{3}$

$\underset{a}{fc} \to \underset{b}{cf} \to \underset{a}{cd} \to \underset{c}{bd} \to \underset{b}{ad}$

子群

$\{e\}$，G，$\to$ 1阶

$\{e,d,f\}\to$ 3阶

$\{e,a\}$，$\{e,b\}$，$\{e,c\}\to$ 2阶

Lagrange 定理：有限群子群的阶必为群阶的因子。

循环子群

$d \longrightarrow \{e,d,d^2=f\}$ 3阶

$f \to \{e,f,f^2=d\}$ 3阶

$a \to \{e,a\}$ 2阶

$b \to \{e,b\}$ 2阶

$c \to \{e,c\}$ 2阶

类

$\{e\}$：1个

$\{d,f\}$：2个

$\{a,b,c\}$：3个

有限群每个类中元素个数是群阶的因子。

不变子群：e．G．$\underset{H}{\{e,d,f\}}$　则 $G=\{e,d,f,a,b,c\}=\{\underset{f_0}{H},\underset{f_1}{aH}\}$

可得商群：$G/H=\{f_0,f_1\}$ 组成的二阶循环群．

$\to f_1^2=(aH)^2=a^2f_0^2$　$\underline{a=e}$　$f_0^2=f_0$

D_3群：
- 在函数空间上的表示（李 P 41）
- 在三维实空间的表示（李 P 39）
- 左正则表示（李 P 54）
- 特征标表以及直积表示（李 P 78）
- 诱导表示（李 P 85）

特征标表与直积表示

由于 $D_3=\{e,d,f,a,b,c\}$ 有 $\{e\}$，$\{d,f\}$，$\{a,b,c\}$ 三类，故有3个不同的表示 A_1, A_2, A_3，设其维数为 s_1, s_2, s_3，则有 $s_1^2+s_2^2+s_3^2=6$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1=1 \\ s_2=1 \\ s_3=2 \end{cases}$$

从而有1个一维恒等表示，1个一维非恒等表示，1个二维表示

1、一维恒等表示：$\{1\}$

2、一维非恒等表示：

(1)通过不变子群的商群求

由于 $\{e,d,f\}$ 是 D_3 的不变子群，所以 D_3 有到 Z_2 的同态映射

D_3	→	Z_2	→	特征标	
$\{e,d,f\}$	→	e	→	1	→ 一维恒等表示
$\{a,b,c\}$	→	a	→	-1	→ 正交性定理要求

均为一维表示

对 Z_2，$s_1^2+s_2^2=2 \Rightarrow s_1=s_2=1$

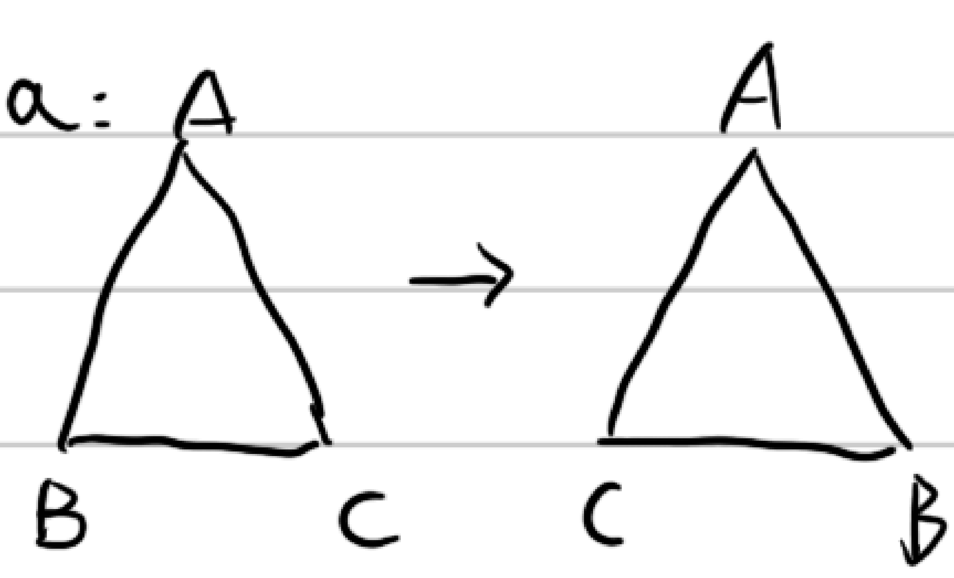
	$\{e\}$	$\{a\}$
A^1	1	1
A^2	1	-1

(2)通过定义求

设 $\hat{k}$，$\hat{k}'$ 分别是作用前后 z 方向基矢.

d：绕 z 轴转 $120°$：$\hat{k}'=\hat{k} \Rightarrow$ 表示为1

a：



相当于 z 轴反向：$\hat{k}'=-\hat{k} \Rightarrow$ 表示为 -1

3、二维表示，通过正交定理求

	$\{e\}$	$2\{d\}$	$3\{a\}$
A^1	1	1	1
A^2	1	1	-1
A^3	2	$x=-1$	$y=0$

$1\oplus 2x+3y=-1$

由正交定理有　　对行要乘类中元数的系数

$$\left.\begin{aligned} &(\text{对 } A^2, A^3 \text{ 两行}) \quad 2+2x-3y=0 \\ &(\text{对 } A^1, A^3 \text{ 两行}) \quad 2+2x+3y=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\text{对 } \{e\}\ 2\{d\} \text{ 两列}) \quad 1+1+2x=0 \\ &(\text{对 } \{e\}\ 3\{a\} \text{ 两列}) \quad 1-1+2y=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

由于直积表示的特征标等于因子特征标乘积，有

$A^1 \otimes A^3 = 2, -1, 0$ 与 A^3 等价（不可约）

$A^2 \otimes A^3 = 2, -1, 0$ 与 A^3 等价（不可约）

$A^1 \otimes A^2 = 1, 1, -1$ 与 A^2 等价（不可约）

$A^3 \otimes A^3 = 4, 1, 0$，记为 C

由于 $(\chi^C | \chi^C) = \frac{1}{6}(4\times4 + 1\times1\times2 + 0) = 3 > 1$

所以 χ^C 可约.

可约表示中某个不可约表示的重复度可由可约表示与这个不可约表示的内积给出，故

A^1, A^2, A^3 重复度分别为:

$m_1 = (\chi^C | \chi^{A^1}) = \frac{1}{6}(4+2\times1) = 1$

$m_2 = (\chi^C | \chi^{A^2}) = \frac{1}{6}(4+2\times1) = 1$

$m_3 = (\chi^C | \chi^{A^3}) = \frac{1}{6}(4\times2 + 1\times(-1)\times2 + 0) = 1$

故 $\chi^C = A^1 \oplus A^2 \oplus A^3$

D_3群的不等价不可约酉表示

	e	a	b	c	d	f
A^1	1	1	1	1	1	1
A^2	1	-1	-1	-1	1	1
A^3	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&e^{i\frac{4\pi}{3}}\\e^{i\frac{2\pi}{3}}&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&e^{i\frac{2\pi}{3}}\\e^{i\frac{4\pi}{3}}&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{i\frac{2\pi}{3}}&0\\0&e^{i\frac{4\pi}{3}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{i\frac{4\pi}{3}}&0\\0&e^{i\frac{2\pi}{3}}\end{pmatrix}$

D_3群的诱导表示

$a^3 \quad a \quad a^2$

$G=\{e, d, f, a, b, c\}$, $H=\{e, d, f\}$（三阶循环群），表示为：

$B(e)=1$

$B(d)=B(a)=e^{\frac{2\pi i(2-1)}{3}}=e^{\frac{2\pi i}{3}}=\varepsilon$ $\quad A(a)=e^{\frac{2\pi i(p-1)}{n}}$

$B(f)=B(a^2)=e^{\frac{4\pi i(2-1)}{3}}=e^{\frac{4\pi i}{3}}=\varepsilon^2$ $\quad A(a^2)=e^{\frac{4\pi i(p-1)}{n}}$

或者直接定义

d：逆时针转$\frac{2\pi}{3}$ $\rightarrow e^{\frac{2\pi i}{3}}$

f：逆时针转$\frac{4\pi}{3}$ $\rightarrow e^{\frac{4\pi i}{3}}$

又由于 $G=\{H, aH\}$，故 $l=6/3=2$ 相应的 $g_i=e, a$

据此就有G的诱导表示为：

$$U^B(e)=\begin{pmatrix}\dot{B}(eee^{-1}) & \dot{B}(eea^{-1})\\ \dot{B}(aee^{-1}) & \dot{B}(aea^{-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{B}(e) & \dot{B}(a)\\ \dot{B}(a) & \dot{B}(e)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B(e) & 0\\ 0 & B(e)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$U^B(d)=\begin{pmatrix}\dot{B}(ede^{-1}) & \dot{B}(eda^{-1})\\ \dot{B}(ade^{-1}) & \dot{B}(ada^{-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B(d) & 0\\ 0 & B(f)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^2\end{pmatrix}$$

$$U^B(f)=\begin{pmatrix}\dot{B}(efe^{-1}) & \dot{B}(efa^{-1})\\ \dot{B}(afe^{-1}) & \dot{B}(afa^{-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B(f) & 0\\ 0 & B(d)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$$

$$U^B(a)=\begin{pmatrix}\dot{B}(eae^{-1}) & \dot{B}(eaa^{-1})\\ \dot{B}(aae^{-1}) & \dot{B}(aaa^{-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$U^B(b)=\begin{pmatrix}\dot{B}(ebe^{-1}) & \dot{B}(eba^{-1})\\ \dot{B}(abe^{-1}) & \dot{B}(aba^{-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dot{B}(f)\\ \dot{B}(d) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon^2\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}$$

$$U^B(c)=\begin{pmatrix}\dot{B}(ece^{-1}) & \dot{B}(eca^{-1})\\ \dot{B}(ace^{-1}) & \dot{B}(aca^{-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dot{B}(d)\\ \dot{B}(f) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ \varepsilon^2 & 0\end{pmatrix}$$

特征标为 2, -1, 0

点群

1. 第一类点群的基本方程

$$\sum_{i=1}^{l}\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=2\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad n\geq n_i\geq 2, \quad l=2,3.$$

分类

① $l=2$, $n_1=n_2=n$ C_n群

② $l=3$, $n_1=2$, $n_2=2$, $n_3=\frac{n}{2}$ =面体群 ($D_3, D_4 \cdots$)

一维不等价不可约表示 3维不等价不可约表示

③ $l=3$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=3$, $n=12$ 正四面体群 (T群) $3\times1+1\times3=6$维

④ $l=3$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=4$, $n=24$ O群

⑤ $l=3$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=5$, $n=60$ 正二十面体群

2. 晶体点群的不可约表示

第一类点群可在晶体中出现的，只有 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T, O$

C_1, C_2, C_3, C_4, C_6：$A^p(a)=e^{\frac{(p-1)2\pi i}{n}}$

D_2: e: 不变

a: 绕 z 转 π

b: 绕 x 转 π $D_2=\{e,a\}\otimes\{e,b\}$

c: 绕 y 转 π

z_2 特征标表为

	e	a/b
A^1	1	1
A^2	1	-1

则 D_2 的直积表示为:

	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
A^1	1	1	1	1
A^2	1	-1	1	-1
A^3	1	1	-1	-1
A^4	1	-1	-1	1

D_3 群

	$\{e\}$	$2\{d\}$	$3\{a\}$
A^1	1	1	1
A^2	1	1	-1
A^3	2	-1	0

D_4 群

	$1\{e\}$	$1\{C_4^2\}$	$2\{C_4\}$	$2\{C_2^{(1)}\}$	$2\{C_2^{(2)}\}$
A^1	1	1	1	1	1
A^2	1	1	1	-1	-1
A^3	1	1	-1	1	-1
A^4	1	1	-1	-1	1
A^5	2	-2	0	0	0

D_6 : $D_6 = D_3 \otimes \{E, C_6^3\}$

T群

	$\{E\}$	$3\{C_2^{(1)}\}$	$4\{C_3^{1}\}$	$4\{C_3^{2}\}$
A^1	1	1	1	1
A^2	1	1	ε	ε^2
A^3	1	1	ε^2	ε
A^4	3	-1	0	0

O群

	$\{E\}$	$6\{C_4^1\}$	$3\{C_4^2\}$	$8\{C_3^1\}$	$6\{C_2^{(1)}\}$
A^1	1	1	1	1	1
A^2	1	-1	1	1	-1
A^3	2	0	2	-1	0
A^4	3	$\chi^4(C_4^1)$	$\chi^4(C_4^2)$	$\chi^4(C_3^1)$	$\chi^4(C_2^{(1)})$
A^5	3	$\chi^5(C_4^1)$	$\chi^5(C_4^2)$	$\chi^5(C_3^1)$	$\chi^5(C_2^{(1)})$

S_3 群的不可约表示

由于 $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1)(2)(3)$，$\gamma^1=3$，$\gamma^2=0$，$\gamma^3=0$

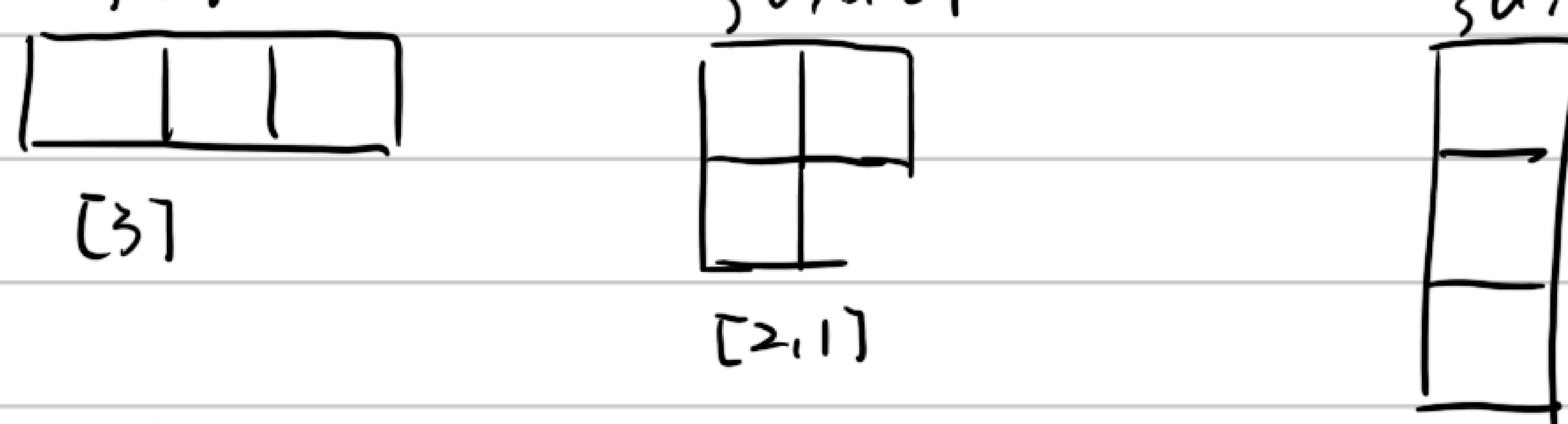
$a=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(1)(2,3)$，$\gamma^1=1$，$\gamma^2=1$，$\gamma^3=0$

b，c 同 a

$d=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1,2,3)$，$\gamma^1=0$，$\gamma^2=0$，$\gamma^3=1$

f 同 d. 故杨图为：

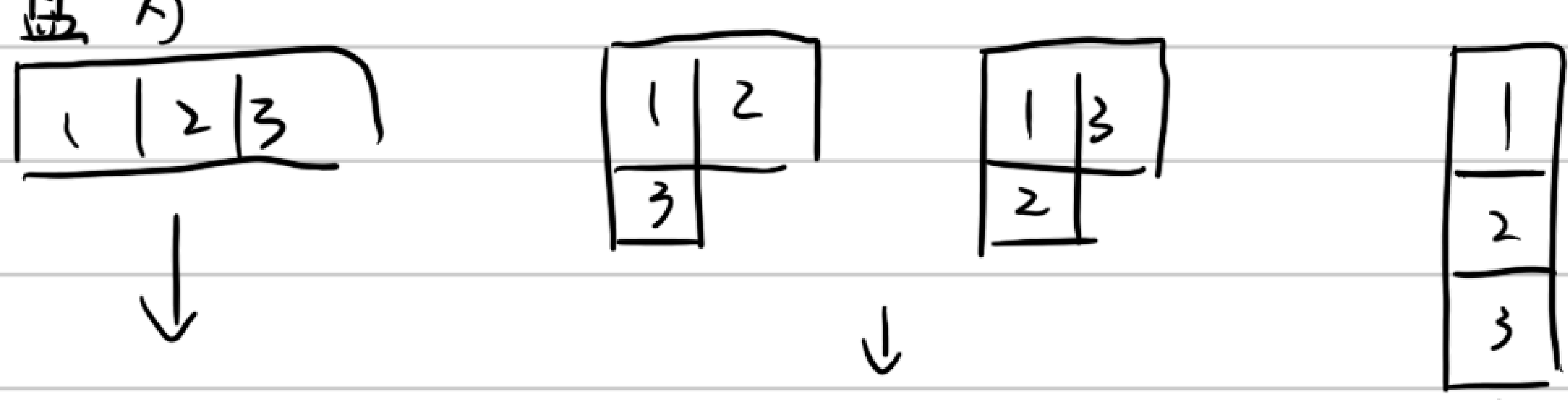
$\{e\}$ $\{a,b,c\}$ $\{d,f\}$



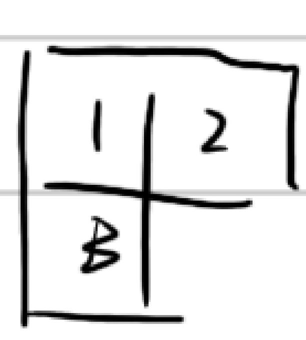
[3] [2,1] [1,1,1]

→ 3类或者3个不等价不可约表示

标准盘为



不可约表示维数：1 2 1



[2,1] 的不可约表示：

$R(T)=\{(1)\ (1,2)\}$

$C(T)=\{(1)\ (1,3)\}$

$\Rightarrow$ 杨算符 $\hat{E}(T)=\{(1)+(1,2)\}\{(1)-(1,3)\}$

$=(1)-(1,3)+(1,2)-(1,2)(1,3)$

$=(1)-(1,3)+(1,2)-(1,3,2)$

$R_{S_3}\hat{E}(T)$ 中两个基为 $\hat{E}(T)$，$(1,3)\hat{E}(T)$.

$(1)\hat{E}(T)=\hat{E}(T)$

$(1,2)\hat{E}(T)=(1,2)-(1,2)(1,3)+(1)-(1,2)(1,3,2)$

$=(1,2)-(1,3,2)+(1)-(1,2)(1,2)(1,3)$

$=(1,2)-(1,3,2)+(1)-(1,3)=\hat{E}(T)$

$(1,3)\hat{E}(T)=(1,3)-(1)+(1,3)(1,2)-(1,3)(1,3,2)$ $\quad (1,3)(3,2,1)=(1,3)(3,1)(3,2)=(3,2)=(2,3)$

$=(1,3)-(1)+(1,2,3)-(2,3)$

$(2,3)\hat{E}(T)=(2,3)[(1)-(1,3)+(1,2)-(1,3,2)]$

$=(2,3)-(2,3)(1,3)+(2,3)(1,2)-(2,3)(1,3,2)$

$=(2,3)-(3,1,2)+(2,1,3)-(2,3)(1,2)(1,3)$

$=(2,3)-(3,1,2)+(1,3,2)-(2,1,3)(1,3)$

$=(2,3)-(1,2,3)+(1,3,2)-(1,3,2)(1,3)$

$=(2,3)-(1,2,3)+(1,3,2)-(1,2)(1,3)(1,3)$

$=(2,3)-(1,2,3)+(1,3,2)-(1,2)$

$=-\{(1)+(1,2)-(1,3)-(1,3,2)\}-\{(1,3)+(1,2,3)-(1)-(2,3)\}$

$=-\hat{E}(T)-(1,3)\hat{E}(T)$

$(1,2,3)\hat{E}(T)=(1,3)(1,2)\hat{E}(T)=(1,3)\hat{E}(T)$

$(1,3,2)\hat{E}(T)=(2,1,3)\hat{E}(T)=(2,3)(2,1)\hat{E}(T)=(2,3)\hat{E}(T)=-\hat{E}(T)-(1,3)\hat{E}(T)$

以 $\hat{E}(T)$ 与 $(1,3)\hat{E}(T)$ 为基

群元 $(1,3,2)$:

$(1,3,2)\hat{E}(T)=(1,2)(1,3)\hat{E}(T)=-\hat{E}(T)-(1,3)\hat{E}(T)$

$(1,3,2)(1,3)\hat{E}(T)=(1,2)\hat{E}(T)=\hat{E}(T)$

从而表示为 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

李群

SO(3): $\begin{cases} \det R = 1 \\ R^T R = I \end{cases}$ $R(\theta) = e^{i\sum_j \theta_j J_j} = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J}}$

SO(3) 李代数的生成元 J_i，满足 $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$

SO(3) 的不可约张量表示

反对称张量 $\frac{1}{2}N(N-1) \xrightarrow{N=3} 3$

对称张量 $\begin{cases} 无迹：\frac{1}{2}N(N+1)-1 \xrightarrow{N=3} 5 \\ 有迹 \quad 1 \end{cases}$

SO(3) 不可约表示维数 $= 2j+1$

$J_\pm |m\rangle = \sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\ |m\pm1\rangle$

$J^2 |j,m\rangle = j(j+1)\ |j,m\rangle$

SU(3) $\begin{cases} \det U = 1 \\ U^+ U = I \end{cases}$ 行列式为1的 3x3 幺正矩阵

SU(N) 李代数：$U = e^{iH}$，H 厄米无迹

$[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc}T^c$

$N=2$. $H = \sum_{a=1}^{3}\frac{1}{2}\theta_a\sigma_a$，$U = e^{i\theta_a\sigma_a/2}$

$N=3$. $H = \theta_a\frac{\lambda_a}{2}$，$U = e^{i\theta_a\lambda_a/2}$

σ_a, λ_a 为 SU(2), SU(3) 生成元，写为 T

确定一个一般的厄米无迹矩阵要 N^2-1 个实数.

SU(2) 局域同构于 SO(3). 且 SU(2) 是 SO(3) 的双覆盖.

SU(2) 不可约表示 $2j+1$ 维.

SO(3) 的特征标：$\chi(j,\psi) = \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\psi}{\sin\frac{\psi}{2}}$

正交关系

$$\int_{SO(3)} d\mu(g)\ \chi(k,\psi)\ \chi(j,\psi) = \int_0^\pi d\psi \sin^2(\tfrac{\psi}{2}) \frac{\sin(k+\frac{1}{2})\psi\,\sin(j+\frac{1}{2})\psi}{\sin^2(\frac{\psi}{2})} = \int_0^\pi d\psi \sin(k+\tfrac{1}{2})\psi \sin(j+\tfrac{1}{2})\psi$$

$$= \frac{\pi}{2}\delta_{jk}$$

1.14

$$S_3=\left\{\begin{array}{l} s_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{} e,\ s_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\to a,\ s_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\to b,\ s_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\to c \\ s_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\to d,\ s_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\to f\end{array}\right\}$$

子群：$\{s_1\}$，$\{s_1,s_2\}$，$\{s_1,s_3\}$，$\{s_1,s_4\}$，$\{s_1,s_5,s_6\}$，$\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\}$

不变子群 ✓ ✓ ✓

1.15

六阶循环群 $\{e=a^6, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$

由 Lagrange 定理，子群阶为 1, 2, 3, 6.

阶为 1：$\{e\}$

阶为 6：$G_6=\{e, a, \dots, a^5\}$

阶为 2：$\{e, a^3\}=G_2$

阶为 3：$\{e, a^2, a^4\}=G_3$

不变子群　　商群

$Z_6/G_6=\{G_6\}$

$Z_6/G_2=\{G_2, aG_2, a^2G_2\}$

$Z_6/G_3=\{G_3, aG_3\}$

1.17 D_3 的自同构群是内自同构群

1.18 设 $k=ghg^{-1}\in G$，$k^2=ghg^{-1}ghg^{-1}=gh^2g^{-1}=gg^{-1}=e$

由于 G 中只有一个阶为 2 的元素 h，于是有 $k=h \Rightarrow h=ghg^{-1}$ 从而 $gh=hg$

1.20 由 $G=H\otimes K$ 可知 $\forall g\in G$ $\exists$ 唯一 $h\in H$, $k\in K$, s.t. $g=hk$

设映射 $\Phi: G\to K$，$\Phi(g)=k$. 由直积表示的唯一性与存在性，可知 Φ 是满映射.

又 $\forall g_i, g_j\in G$，$\Phi(g_ig_j)=\Phi(h_ik_ih_jk_j)=\Phi((h_ih_j)(k_ik_j))=k_ik_j$

$\Phi(g_i)\Phi(g_j)=k_ik_j$ 于是 Φ 保乘法，于是 Φ 是 $G\to K$ 的同态映射

G 与 K 同态，H 为同态核，则 G/H 与 K 同构.

2.1 (1)

A 为 G 的表示，则存在同态映射 $A: G\to M$，M 为矩阵群，$\forall g_\alpha\in G$，$A(g_\alpha)\in M$

且 $\forall g_\alpha, g_\beta\in G$，$A(g_\alpha g_\beta)=A(g_\alpha)A(g_\beta)$，$A(g_0)=E$.

定义映射 $A^*: G\to M^*$，M^* 为 M 中矩阵取复共轭

$\forall g_\alpha\in G$，$A^*(g_\alpha)\in M^*$

$\forall g_\alpha, g_\beta\in G$. $A^*(g_\alpha g_\beta)=[A(g_\alpha)A(g_\beta)]^*=A^*(g_\alpha)A^*(g_\beta)$，$A^*(g_0)=E$

因此 A^* 也是同态映射，即 A^* 也是一个表示.

(2) A不可约 $\Rightarrow (\chi^A|\chi^A)=1 \Rightarrow (\chi^{A^*}|\chi^{A^*})=1$，即 A^* 也不可约

(3) 设A为幺正的 若 A^* 非幺正的 则有 $[A^*(g)]^\dagger A^*(g) = A^T(g)A^*(g) \neq E$

$\Rightarrow [A(g)]^\dagger A(g) \neq E$ 从而 $A(g)$ 非幺正与题设矛盾.

2.2

(1) A是一个表示 $\Rightarrow A(e)=I$，$A(s)A(g)=A(sg)$，$\forall s,g\in G$. 由于

$[A^T(e)]^{-1}=I$，且 $\forall s,g\in G$，$(A^T(sg))^{-1}=[(A^T(g)A^T(s))]^{-1}=(A^T(s))^{-1}(A^T(g))^{-1}$

以及 $(A^\dagger(e))^{-1}=I$，且 $\forall s,g\in G$，$(A^\dagger(sg))^{-1}=[A^\dagger(g)A^\dagger(s)]^{-1}=(A^\dagger(s))^{-1}(A^\dagger(g))^{-1}$

所以 $(A^T(g))^{-1}$ $A^\dagger(g)^{-1}$ 是表示

(2) A不可约 则 $(\chi^A|\chi^A)=1 \Rightarrow (\chi^{(A^T)^{-1}}|\chi^{(A^T)^{-1}})=(\chi^{(A^\dagger)^{-1}}|\chi^{(A^\dagger)^{-1}})=1$，即不可约.

1.3 $A^T(sg)=A^T(g)A^T(s)$

$A^\dagger(sg)=A^\dagger(g)A^\dagger(s)$

仅当 $A(sg)=A(gs)$，即A为Abel群时，$A^T(sg)$ 与 $A^\dagger(sg)$ 才构成表示.

1.4.

$\forall g_\alpha\in G$，$A(g_\alpha)\sum\limits_{g\in C}A(g)=A(g_\alpha)\sum\limits_{g\in C}A(gg_\alpha^{-1}g_\alpha)=\sum\limits_{g\in C}A(g_\alpha g g_\alpha^{-1})A(g_\alpha)$

由于C是共轭类 可知 $\forall g\in C$，$g_\alpha\in G$，$g_\alpha g g_\alpha^{-1}\in C$，且若C中 $g_i\neq g_j$ 有

$g_\alpha g_i g_\alpha^{-1}\neq g_\alpha g_j g_\alpha^{-1}$，$\sum\limits_{g\in C}A(g_\alpha g g_\alpha^{-1})=\sum\limits_{g\in C}A(g)$.

$\Rightarrow A(g_\alpha)\sum\limits_{g\in C}A(g)=\sum\limits_{g\in C}A(g)A(g_\alpha)$

由shur引理二有 $\sum\limits_{g\in C}A(g)=\lambda E$.

2.7 设 $C(g)=A(g)\otimes B(g)$

$(\chi^C|\chi^C)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\chi^{A*}(g_i)\chi^{B*}(g_i)\chi^A(g_i)\chi^B(g_i)$

由于A是G的不可约表示，B是一维非恒等表示，有

$(\chi^A|\chi^A)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\chi^{A*}(g_i)\chi^A(g_i)=1$

$|\chi^B(g_i)|=1 \Rightarrow \chi^{B*}(g_i)\chi^B(g_i)=1$

从而 $(\chi^C|\chi^C)=1$，即 C 不可约.

11. 分别将 $L(a)$，$L(a^2)$，$L(a^3)$，$L(e)$ 作用于群元

12. 设 $\chi^{A'}$ 为恒等表示特征标，则有

$(\chi^{A^p\otimes A^{r*}}|\chi^{A'})=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\chi^{p*}(g_i)\chi^r(g_i)\chi^{A'}(g_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\chi^{p*}(g_i)\chi^r(g_i)=(\chi^{A^p}|\chi^{A^r})=0$

即不含恒等表示

$(\chi^{A^p\otimes A^{p*}}|\chi^{A'})=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\chi^{p*}(g_i)\chi^p(g_i)\chi^{A'}(g_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\chi^{p*}(g_i)\chi^p(g_i)=1$

含一次恒等表示

13. 表示矩阵的矩阵元只有0和1，每行(每列)只有一个矩阵元为1

14. χ^P是G的非恒等表示的特征标，设A'为恒等表示则有 $(\chi^P|\chi^{A'})=0$

$$\sum_{g\in G}\chi^P(g)=n\cdot\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^P(g)\times 1=n\times\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^P(g)\chi^{A'}(g)=n(\chi^{A'}|\chi^P)=0.$$