Group Theory | REVIEW

群论

韩其智、孙洪洲

* *E-Mail: matao24@mails.ucas.ac.cn*

摘要:

对群的基本概念和群表示论基础进行了简明扼要的整理, 略去了定理的相关证明.

Contents

1 群的基本知识 **2**
1.1 群 2
1.2 子群和陪集 3
1.3 类与不变子群 4
1.4 群的同态与同构 6
1.5 变换群 8
1.6 群的直积与半直积 9

2 群表示论的基础 **11**
2.1 群表示 11
2.2 等价表示、不可约表示和酉表示 14
2.3 群代数和正则表示 17
2.4 有限群表示理论 19
2.5 群表示的特征标理论 22
2.6 新表示的构成 24

1. 群的基本知识

1.1. 群

Definition 1.1 (群). 设 G 是一些元素的集合,$G = \{\cdots, g, \cdots\} = \{g\}$. 在 G 中定义了乘法运算, 如果 G 对这种运算满足下面四个条件:

1. 封闭性.$\forall f, g \in G$, 若 $fg = h$, 必有 $h \in G$[1].
2. 结合律.$\forall f, g, h \in G$, 都有 $(fg)h = f(gh)$.
3. 有唯一的单位元. 有 $e \in G, \forall f \in G$, 都有 $ef = fe = f$.
4. 有逆元素.$\forall f \in G$, 有唯一的 $f^{-1} \in G$ 使得 $f^{-1}f = ff^{-1} = e$.

则称 G 为一个群.e 称为群 G 的单位元素,f^{-1} 称为 f 的逆元素.

Example (空间反演群). 集合 $\{E, I\}$ 构成**空间反演群**, 若 E 和 I 对三维实空间 $\mathbb{R}^3$ 的向量 $\mathbf{r}$ 作用为

$$\begin{cases} E\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}, \\ I\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}, \end{cases}$$

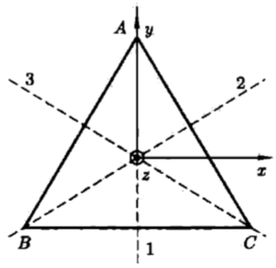
而且群的乘法定义为从右到左连续对 $\mathbf{r}$ 作用.

Example (D_3 群). D_3 群又叫 6 阶二面体群, 定义两个转动操作的乘积, 如 ab 为先实行操作 b, 再实行操作 a . 在上述乘法定义下保持正三角形不变的全体转动操作构成 $D_3 = \{e, d, f, a, b, c\}$, 具有乘法表[2]如下

Figure 1. D_3 群的乘法表

操作	代号	e	d	f	a	b	c
不转	e	e	d	f	a	b	c
绕 z 轴转 $2\pi/3$	d	d	f	e	c	a	b
绕 z 轴转 $4\pi/3$	f	f	e	d	b	c	a
绕轴 1 转 π	a	a	b	c	e	d	f
绕轴 2 转 π	b	b	c	a	f	e	d
绕轴 3 转 π	c	c	a	b	d	f	e

Figure 2. D_3 群操作示意图



[1]包含元素和其自身的乘积.

[2]记住 $d^2 = f, df = e, a^2 = b^2 = c^2 = e$ 以及 $ad = b, af = c, da = c, fa = b$ 几个基本的, 便可以根据轮换得到其他的, 具体而言就是

$$\begin{cases} ad = b \Rightarrow bd = c, cd = a \\ af = c \Rightarrow bf = a, cf = b \\ da = c \Rightarrow db = a, dc = b \\ fa = b \Rightarrow fb = c, fc = a \end{cases}$$

当然也能通过群定义直接看出来.

Example. 若以数的加法为“乘法”, 则全体复数 (包括实数、整数) 构成一个群. 若以数的乘法为“乘法”, 除去 0 以外的实数构成一个群.

Definition 1.2. *当群 G 的元素个数有限时, G 称为有限群. 当 G 的元素个数为无限时, G 称为无限群. 有限群 G 的元素的个数 n 称为群的阶, 有时记为 $n(G)$.*

Definition 1.3 (Abel 群)**.** *群的乘法一般不具有可交换性, 即 $\forall f, g \in G$, 一般 $fg \neq gf$. 如果对任意 $f, g \in G$, 有 $fg = gf$, 则称 G 是可交换群或者 Abel 群.*

群 G 的任一个元素总可用在一定范围内变化的一个数 a 标记为 g_a, 给出此范围中任一个数 a, 就对应群 G 的一个元素.

Theorem 1.1 (重排定理)**.** *设 $G = \{g_\alpha\}, u \in G$, 当 α 取遍所有可能值时, 乘积 ug_α 给出并且仅仅一次给出 G 的所有元素.*

Corollary 1.1. *$g_\alpha u$ 在 α 取遍所有可能值时, 也给出且仅仅一次给出群 G 中的所有元素.*

1.2. 子群和陪集

Definition 1.4 (子群)**.** *设 H 是群 G 的一个子集, 若对于与群 G 同样的乘法运算,H 也构成一个群, 称 H 是 G 的子群, 记作 $H \subset G$.*

Corollary 1.2. *群 G 的非空子集 H 是 G 的子群的充要条件是:*

(1). *H 满足封闭性: 若 $h_\alpha, h_\beta \in H$, 则 $h_\alpha h_\beta \in H$.*

(2). *H 存在逆元: 若 $h_\alpha \in H$, 则 $h_\alpha^{-1} \in H$.*

对于群 G, 它的单位元素 e 与 G 自身为 G 的子群, 称为显然子群或者平庸子群. 群 G 的非显然子群称为固有子群. 若不作特别说明, 子群一般特指固有子群.

Definition 1.5 (循环群)**.** *n 阶循环群是由元素 a 的幂 a^k 组成,$k = 1, 2, \cdots, n$, 且 $a^n = e$, 记为:$Z_n = \{a, a^2, \cdots, a^n = e\}$.*

循环群的乘法可交换, 故循环群为 Abel 群.

Corollary 1.3. *从 n 阶有限群 G 的任一个元素 a 出发, 总可以构成群 G 的一个循环子群 $Z_k = \{a, a^2, \cdots, a^k = e\}$. 称 a 的阶为 k,Z_k 是由 a 生成的 k 阶循环群.*

Definition 1.6 (陪集或者旁集)**.** *设 $H = \{h_\alpha\}$ 是群 G 的子群. 由固定的 $g \in G$, $g \notin H$[3], 可以生成子群 H 的左陪集 $gH = \{gh_\alpha | h_\alpha \in H\}$ 和 H 的右陪集 $Hg = \{h_\alpha g | h_\alpha \in H\}$.*

当 H 为有限子群时, 陪集元素的个数等于 H 的阶. 亦即子群中元素与陪集中元素一一对应.

Theorem 1.2 (陪集定理)**.** *设群 H 是群 G 的子群, 则 H 的两个左 (右) 陪集或者有完全相同的元素, 或者没有任何公共元素.*

[3] $g \notin H$ 意味着陪集不是子群本身. 如果放松这个限制, 那么陪集可以是子群本身.

Theorem 1.3 (Lagrange 定理)**.** *有限群的子群的阶等于该有限群阶的因子.*

Corollary 1.4. *阶为素数的群没有非平庸子群.*

Example. D_3 有子群 $H_1 = \{e, a\}, H_2 = \{e, b\}, H_3 = \{e, c\}$ 和 $H_4 = \{e, d, f\}$.

1.3. 类与不变子群

Definition 1.7 (共轭)**.** *对于群 G 中的元素 f, h, 若 $\exists g \in G$, 使得 $gfg^{-1} = h$, 称 h 与 f 共轭, 记为 $h \sim f$.*

Proposition. *共轭的两个元素具有如下两个性质:*

(1). *对称性, 即当 $h \sim f$, 则 $f \sim h$. 且 $f \sim f$.*

(2). *传递性, 即当 $f_1 \sim h, f_2 \sim h$, 则 $f_1 \sim f_2$.*

Definition 1.8 (类)**.** *群 G 的所有相互共轭的元素的集合组成 G 的一个类.*

共轭关系的对称性和传递性使得类被其中任意一个元素所决定. 给出类中任意一个元素 f, 可以求出 f 类的所有元素:

$$f\text{类} = \left\{ f' | f' = g_\alpha f g_\alpha^{-1}, g_\alpha \in G \right\}.$$

- 一个群的单位元素 e 自成一类.[4]
- Abel 群的每个元素自成一类.[5]
- 设元素 f 的阶为 m, 即 $f^m = e$, 则 f 类所有元素的阶都是 m.[6]

当 g_α 取遍群 G 的所有元素时,$g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 可能会不止一次地给出 f 类中的元素. 如 $f = e, g_\alpha f g_\alpha^{-1}$ 总是给出单位元素 e.

由共轭关系的传递性知, 两个不同类之间没有公共元素. 因此可以按照共轭类对群进行分割, 此时每个类中元素个数不一定相同, 而按照子群的陪集对群进行分割, 每个陪集元素的个数都是相同的.

Theorem 1.4. *有限群每类元素的个数等于群阶的因子.*

Definition 1.9 (共轭子群)**.** *设 H 和 K 是群 G 的两个子群, 若有 $g \in G$ 使得*

$$K = gHg^{-1} = \{k = ghg^{-1} | h \in H\},$$

则称 H 是 K 的共轭子群.

[4]这是因为 $\forall g_k \in G, g_k g_0 g_k^{-1} = g_0$.

[5]这是因为 $\forall g \in G, g_k g g_k^{-1} = g g_k g_k^{-1} = g$.

[6]这是因为 $\forall g_\alpha \in G, (g_\alpha f g_\alpha^{-1})^m = \underbrace{(g_\alpha f g_\alpha^{-1}) \cdot (g_\alpha f g_\alpha^{-1}) \cdot \cdots \cdot (g_\alpha f g_\alpha^{-1})}_{m\text{个}} = g_\alpha f^m g_\alpha^{-1} = e$.

共轭子群也有对称性和传递性.G 的全部子群可以分割为共轭子群类.

Example. D_3 群的三个子群 $\{e,a\},\{e,b\},\{e.c\}$ 互为共轭子群, 如 $\{e,c\}=f\{e,a\}f^{-1}$.

Definition 1.10 (不变子群)**.** 设 H 是 G 的子群, 若对任意 $g\in G, h_\alpha\in H$, 有 $gh_\alpha g^{-1}\in H$. 即如果 H 包含 h_α, 则它将包含所有与 h_α 同类的元素, 称 H 是 G 的不变子群.

Theorem 1.5. 设 H 是 G 的不变子群, 对任一固定元素 $f\in G$, 在 h_α 取遍 H 的所有群元时, 乘积 $fh_\alpha f^{-1}$ 一次且仅仅一次给出 H 的所有元素.

Abel 群的所有子群都是不变子群.

Corollary 1.5. 不变子群的左陪集和右陪集是重合的, 故不必区分, 只说不变子群的陪集即可.

Corollary 1.6. 设 H 是 G 的不变子群, 考虑没有公共元素的 H 的陪集串 $H, g_1H, g_2H,\cdots,g_iH,\cdots$, 假定陪集串穷尽了群 G, 两个陪集 g_iH 和 g_jH 中元素的乘积, 必属于另一个陪集.

Definition 1.11 (商群)**.** 设群 G 的不变子群 H 生成的陪集串为 $H, g_1H, g_2H,\cdots,g_iH,\cdots$, 把其中每一个陪集看成一个新的元素, 并由两个陪集中的元素相乘得到另一个陪集中的元素, 定义新的元素之间的乘法规则. 即

$$\begin{aligned}
\text{陪集串} &\longrightarrow \text{新元素}\\
H &\longrightarrow f_0\\
g_1H &\longrightarrow f_1\\
g_2H &\longrightarrow f_2\\
g_3H &\longrightarrow f_3\\
&\cdots\cdots\\
g_iH &\longrightarrow f_i\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

乘法规则:

$$g_ih_\alpha g_jh_\beta = g_kh_\delta \longrightarrow f_if_j=f_k.$$

这样得到的群 $\{f_0,f_1,f_2,\ldots,f_i,\cdots\}$ 称为不变子群 H 的商群, 记为 G/H.

Example. D_3 群 G 的子群有 $\{e\},G,\{e,a\},\{e,b\},\{e,c\},\{e,d,f\}$, 非平庸的不变子群只有 $H=\{e,d,f\}$, 由于 $G=\{H,aH\}$, 作对应 $H\to f_0, aH\to f_1$, 则商群 $G/H=\{f_0,f_1\}$. 这是一个二阶循环群.[7]

[7]这是因为 $f_1^2\to a^2H^2=eH^2\to f_0, f_0$ 是商群 G/H 的单位元.

1.4. 群的同态与同构

Definition 1.12 (同构)**.** *若从群 G 到群 F 上存在一个一一对应的满映射 Φ, 而且 Φ 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变: 群 G 中的两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积. 称群 G 和群 F 同构, 记作 $G \cong F$. 映射 Φ 称为同构映射.*

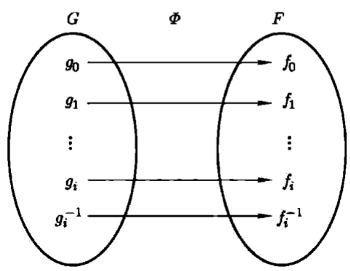


Figure 3. 同构关系示意图

Corollary 1.7. *设同构映射 Φ 将群 G 映射为 F, 即 $G \cong F$, 则有:*

(1). G 的单位元素映射为 F 的单位元素. 即 $g_0 \xrightarrow{\Phi} f_0$.

(2). G 的互逆元素映射为 F 的互逆元素, 即 $g_i, g_i^{-1} \xrightarrow{\Phi} f_i, f_i^{-1}$.

(3). 群 F 与群 G 同构, 即 $F \cong G$.

两个同构的群, 不仅群的元素之间存在一一对应关系, 而且它们所满足的乘法规则之间也有一一对应关系. 从数学角度看, 两个同构的群具有完全相同的群结构, 没有本质区别. 同构的群有完全相同的乘法表.

Example (一些同构的例子)**.**

- 空间反演群 $\{E, I\}$ 和二阶循环群 $Z_2 = \left\{a, a^2 = e\right\}$ 同构.
- 三阶对称群 S_3 和正三角形对称群 D_3 同构.
- 群 G 的两个互为共轭的子群 H 和 K 是同构的. [8]

Definition 1.13 (同态)**.** *设存在一个从群 G 到群 F 的满映射 Φ[9], 保持群的基本运算规则 (乘法) 不变:G 中两个元素乘积的映射等于两个元素映射的乘积, 则称群 G 与群 F 同态. 记作 $G \sim F$. 映射 Φ 称为从 G 到 F 上的同态映射.*

同态映射 Φ 并不是一一对应的, 对于群 F 中的一个元素 f_i, 群 G 中可能有不止一个元素 g_i, g_i' 与之对应. 因此,$G \sim F \nRightarrow F \sim G$.

[8]这是因为 $\exists g \in G, s.t. h_a \in H$ 与 $k_i \in K$ 有一一对应关系, $h_a = g k_a g^{-1}, k_a = g^{-1} h_a g$.

[9]数学上的群同态并没有满映射的要求, 只需要保持乘法规则即可. 由于在群表示中要求满映射, 而我们的关注点就是群的表示理论, 所以这里一上来就给同态加上这样一个限制.

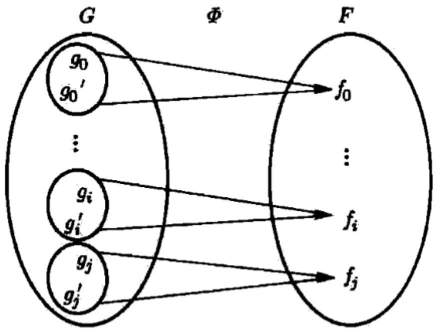


Figure 4. 同态关系示意图

同构是特殊的同态, 即当同态映射 Φ 是一一映射时, 同态就是同构. 即

$$G \cong F \Rightarrow G \sim F, G \sim F \nRightarrow G \cong F.$$

任何群 G 与只有单位元素的群 $Z_1 = \{e\}$ 同态, 一般不考虑这种显然的同态.

Definition 1.14 (同态核)**.** *设群 G 与群 F 同态,G 中与 F 的单位元素 f_0 对应的元素集合 $H = \{h_\alpha\}$, 称为同态核.*

Theorem 1.6 (同态核定理)**.** *设群 G 与群 F 同态, 则有*

(1). 同态核 H 是 G 的不变子群;

(2). 商群 G/H 与 F 同构.

同态核定理告诉我们的信息有 (图4中)

(1). 每个小圈内元素个数相同;

(2). 与 F 中单位元素对应小圈内的 g 元素的集合构成 G 的一个子群;

(3). 这个子群不光是子群, 还是不变子群;

(4). 其他圈对应的是它的陪集;

(5). 如果把这些圈圈当成新的元素, 那么这些元素的结合形成的群与 F 群完全同构.

Definition 1.15 (自同构映射)**.** *群 G 到自身的同构映射 $v : G \to G$ 称为 G 的自同构映射, 即 $\forall g_\alpha \in G$, 有 $v(g_\alpha) = g_\beta \in G$, 且保持群的乘法规律不变:$v(g_\alpha g_\beta) = v(g_\alpha)v(g_\beta)$.*

自同构映射 v 总是将

- 群 G 的单位元素 g_0 映射为 g_0.
- 互逆元素 g_α 和 g_α^{-1} 映射为互逆元素 g_β 和 g_β^{-1}.

Definition 1.16 (自同构群)**.** 定义两个自同构 v_1 和 v_2 的乘积 $v_1 v_2$ 为先实行自同构映射 v_2, 再实行自同构映射 v_1. 恒等映射 v_0 对应于单位元素. 每个自同构映射 v 有逆 v^{-1} 存在. 于是群 G 的所有自同构映射 v 构成一个群, 称为群 G 的自同构群, 记为 $A(G)$ 或者 $Aut(G)$.

Definition 1.17 (内自同构映射)**.** 如果群 G 的自同构映射 μ 是由 $u \in G$ 引起的, 即 $\forall g_\alpha \in G, \mu(g_\alpha) = u g_\alpha u^{-1}$, 称 μ 是 G 的内自同构映射.

Definition 1.18 (内自同构群)**.** 定义内自同构的乘法后, 群 G 的所有内自同构 μ 构成一个群, 称为群 G 的内自同构映射群, 记为 $I(G)$ 或者 $In(G)$.

Abel 群对应于不同元素的内自同构映射都是恒等映射.

Corollary 1.8. 内自同构群 $I(G)$ 是自同构群 $A(G)$ 的一个子群, 而且是 $A(G)$ 的不变子群.

Example. 三阶循环群 $z_3 = \{e, a, a^2\}$ 的自同构映射群为 $\{v_0, v\}$, 满足 $\{e, a, a^2\} \xrightarrow{v_0} \{e, a, a^2\}, \{e, a, a^2\} \xrightarrow{v} \{e, a^2, a\}$[10], 而内自同构映射群只能是 $\{v_0\}$.

1.5. 变换群

Definition 1.19 (变换或者置换)**.** 设 $X = \{x, y, z, \cdots\}$ 是被变换对象,X 上的置换f 是将 X 映入自身的一一满映射,$f : X \to X$, 即 $\forall x \in X, f(x) = y \in X$, 且 f 有逆 $f^{-1} : f^{-1}(y) = x$.

Definition 1.20 (完全对称群)**.** 定义 X 上两个置换 f 和 g 的乘积 fg 为对 X 先实行置换 g, 再实行置换 f, 即 $\forall x \in X, fg(x) = f(g(x))$.$X$ 的全体置换在此乘法下构成一个群, 称为 X 上的完全对称群, 记为 $S_X = \{f, g, \cdots\}$. 恒等置换 e 是 S_X 的单位元素, 置换 f 与其逆置换 f^{-1} 为 S_X 的互逆元素.

被变换元素 X 的元素个数可以是无限的, 也可以是有限的. 当 X 有无限多个元素时,S_X 是无限群. 当 X 有 n 个元素时,X 的完全对称群 S_X 就是 n 个元素的置换群 S_n, 共有 $n!$ 个元素.

X 的完全对称群 S_X 的任何一个子群是 X 的一个对称群, 又称为 X 上的变换群.

Theorem 1.7 (Cayley 定理)**.** 群 G 同构于 G 的完全对称群 S_G 的一个子群. 特别地, 当 G 是 n 阶有限群时,G 同构于 S_n 的一个子群.

Definition 1.21 (等价)**.** 设 $G = \{f, g, h \cdots\}$ 是 $X = \{x, y, z, \cdots\}$ 的一个变换群, 若 $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ 使得 $gx = y$, 则称元素 x 是 G 等价于元素 y, 或称为 x 点与 y 点等价, 记作 $x \sim y$.

等价具有如下两个性质:

[10] 这里要固定集合内元素的顺序.

- 对称性: 若 $x \sim y$, 必有 $y \sim x$.

- 传递性: 若 $x \sim y, y \sim z$, 必有 $x \sim z$.

Definition 1.22 (轨道)**.** 由 X 中全部与 x 等价的点组成的轨道称为含 x 的 G 轨道, 即为 $\{gx|g \in G\}$. 即从点 x 出发, 用 G 中元素 g 作用于 x, 当 g 取遍 G 的所有元素时,gx 给出 X 的一个子集, 这个子集就是含 x 的 G轨道.

Definition 1.23 (不变子集)**.** X 的 G不变子集Y 是指 X 的子集 Y, 在变换群 G 的作用下不会变到 Y 之外, 即 $\forall g \in G, y \in Y$, 有 $g(y) \in Y$.

X 中的每一个 G 轨道是 G 不变的. 几个轨道的和集也是 G 不变的. 当集合 Y 是 G 不变时,G 也是 Y 的对称群.

设 G 是 X 的变换群, 则对于 X 的任意子集 Y, 总可以找到 G 的一个子群 H 使得任意子集 Y 是 H 不变的, 即 $H = \{g \in G|g(Y) = Y\}$.Y 不变的子群 H 总是存在的, 因为 Y 对由单位变换 $\{e\}$ 构成的显然子群总是不变的.

Definition 1.24 (迷向子群)**.** 设 G 是 X 上变换群,x 是 X 内一点,G 的子群 G^x 保持 x 不变:$G^x = \{h \in G|hx = x\}$.G^x 称为 G 对 x 的迷向子群.

Theorem 1.8. 设 G^x 是 G 对 x 的迷向子群, 则 G^x 的每一个左陪集把点 x 映射为 X 中的一个特定的点 y. 亦即含有 x 的 G 轨道上的点和 G^x 的左陪集间有一一对应关系.

设 G 是 n 阶有限群,G^x 左陪集的个数就是含有 x 的 G 轨道中点的个数. 设 G^x 的阶为 $n(G^x)$, 则含 x 的 G 轨道中共有 $n/n(G^x)$ 个点.

Example. 设 A, B, C 是平面正三角形的三个顶点, 只考虑转动,D_3 是其对称群. A 是 X 中一点, 其迷向子群是 $\{e, a\}$. 这个迷向子群的左陪集 $b\{e, a\} = \{b, f\}$ 将 A 映为 C. 左陪集 $c\{e, a\} = \{c, d\}$ 将 A 映为 B. 含 A 的 G 轨道上点的个数是 $6/2 = 3$.

1.6. 群的直积与半直积

Definition 1.25 (直积群)**.** 设 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$, 则 G_1 和 G_2 直积群 G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 为 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$. 对于 $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha'\beta'} \in G$, 定义直积群的乘法为

$$g_{\alpha\beta}g_{\alpha'\beta'} = (g_{1\alpha}g_{2\beta})(g_{1\alpha'}g_{2\beta'}) = (g_{1\alpha}g_{1\alpha'})(g_{2\beta}g_{2\beta'}) = (g_{2\beta}g_{2\beta'})(g_{1\alpha}g_{1\alpha'}) = g_{1\alpha''}g_{2\beta''} = g_{2\beta''}g_{1\alpha''},$$

其中 $g_{1\alpha}g_{1\alpha'} = g_{1\alpha''} \in G_1, g_{2\beta}g_{2\beta'} = g_{2\beta''} \in G_2$. 由 $g_{\alpha\beta}$ 并且按照上述乘法规则得到 G_1 与 G_2 的直积群G, 记为: $G = G_1 \otimes G_2$或者$G = G_1 \times G_2$.

Definition 1.26 (直积)**.** 设群 G 有子群 G_1 和 G_2, 满足

(1). G 的每个元素 $g_{\alpha\beta}$ 能够唯一表示成 $g_{\alpha\beta} = g_{1\alpha}g_{2\beta}$, 其中 $g_{1\alpha} \in G_1, g_{2\beta} \in G_2$.

(2). G_1 与 G_2 的元素按照 G 的乘法规则可交换, 即 $g_{1\alpha}g_{2\beta} = g_{2\beta}g_{1\alpha}$.

则称群 G 是其子群 G_1 和 G_2 的直积,$G = G_1 \times G_2$,G_1 与 G_2 称为群 G 的直积因子.

Corollary 1.9. 当群 G_1 和群 G_2 是群 G 的直积因子时,G 的单位元素 e 是 G_1, G_2 的唯一公共元素, 且 G_1, G_2 都是群 G 的不变子群.

Example. 6 阶循环群 $Z_6 = \left\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\right\}$, 是二阶循环群 $G_1 = \left\{a^3, a^6 = e\right\}$ 和三阶循环群 $G_2 = \left\{a^2, a^4, a^6 = e\right\}$ 的直积群. 即 $Z_6 = G_1 \otimes G_2$, G_1 和 G_2 唯一的公共元素是单位元素 e, G_1 和 G_2 都是 Z 的不变子群,Z_6/G_1 同构于 G_2.

Definition 1.27 (半直积群)**.** 设群 $G_1 = \{g_{1\alpha}\}, G_2 = \{g_{2\beta}\}$,$G_1$ 的自同构群为 $A(G_1)$, $v \in A(G_1)$. 若存在一个把 G_2 映射为 $A(G_1)$ 的同态映射 $\Phi : G_2 \longrightarrow A(G_1)$, 即 $\Phi : g_{2\beta} \longrightarrow v_{g_{2\beta}}$, 则可定义 G_1 与 G_2 的半直积群 G, 记作

$$G = G_1 \otimes_s G_2 \text{或} G = G_1 \rtimes G_2.$$

G 的元素 $g_{\alpha\beta}$ 可唯一写为 $g_{\alpha\beta} = \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle$, 其中 $g_{1\alpha}$ 和 g_β 为有序的. G 的乘法定义为:

$$g_{\alpha\beta} g_{\alpha'\beta'} = \langle g_{1\alpha} g_{2\beta} \rangle \langle g_{1\alpha'} g_{2\beta'} \rangle = \langle g_{1\alpha} v_{g_{2\beta}}(g_{1\alpha'}) g_{2\beta} g_{2\beta'} \rangle.$$

Corollary 1.10. 若 $G = G_1 \otimes_8 G_2, G_1$ 是 G 的不变子群, 但一般 G_2 并不是 G 的不变子群.

Example. 对于 $D_3 = \{e, d, f, a, b, c\}$, 取 $G_1 = \{e, d, f\}, G_2 = \{e, a\}$, 则有 $D_3 = G_1 \otimes {}_8 G_2$.

2. 群表示论的基础

群表示是群 G 到线性空间 V 上的某一个线性变换群 $L(V,C)$ 的同态映射, 亦即表示是同态映射关系.[11]

2.1. 群表示

Definition 2.1 (线性变换)**.** *设 V 是数域 K 上的线性空间,线性变换A 是将 V 映入 V 的线性映射, 即 $\forall x, y \in V, a \in K$ 有*

$$A : V \to V, A(x) \in V;$$
$$A(ax + y) = aA(x) + A(y).$$

Definition 2.2 (线性变换的运算)**.** *设 A 和 B 是从 V 到 V 的线性变换, 则可定义线性变换的数乘、加法和乘法为:*

$$(aA)(x) = a(A(x)),$$
$$(A + B)(x) = A(x) + B(x),$$
$$(AB)(x) = A(B(x)).$$

若线性变换 A 还是把 V 映入 V 的一一对应满映射, 则存在 A 的逆线性变换 A^{-1}.

设 A 是线性空间的一个线性变换, 对该空间任意一个基矢 e_j, 做线性变换 Ae_j 都会得到另外一个向量 e'_j, 并且满足

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

线性变换 A 如果用矩阵表示, 它的第 j 列就是这个线性变换作用到这个线性空间中已选定的基矢组的第 j 个基矢上得到的向量在这组基矢下的展开系数. 这样如果知道变换作用到基上会产生什么样的结果, 就知道相应变换的矩阵表示了.

Definition 2.3 (复一般线性群)**.** *设 V 为 n 维复向量空间, 当定义乘法为连续两次线性变换时,V 上全部非奇异[12]线性变换构成一个群, 称为 n 维复一般线性群 $GL(n, C)$ 或者 $GL(V, C)$. 其中, 单位元素为 V 上的恒等变换, 互逆元素为互逆变换.*

如果在 V 中选一组基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, V 中非奇异线性变换就表示 $n \times n$ 非奇异

[11] 在具体讨论中又经常说"某线性变换群 (或某矩阵群) 是某抽象群的表示", 其实已经把这个"同态映射关系 (也就是表示)"用其同态映射的目标 (线性变换群或矩阵群) 代替了.

[12] 非奇异是为了将行列式为零的矩阵排除在外, 因为它们没有逆.

复矩阵. 因此群 $GL(n,C)$ 也可定义为 $n\times n$ 非奇异复矩阵所构成的群. 这个群的乘法就是矩阵乘法. V 上线性变换群 $L(V,G)$ 是 V 上非奇异线性变换构成的群, 它是群 $GL(V,C)$ 的子群.

Definition 2.4 (线性表示)**.** *群 G 到线性空间 V 上线性变换群 $L(V,C)$ 的同态映射 A, 称为 G 的一个线性表示或者简称表示, V 称为表示空间. 当 V 的维数是 n 时, 表示 A 的维数也是 n. 即*

$$A:G\to L(V,C).$$

对 $g_\alpha\in G$, 有 $A(g_\alpha)\in L(V,C)$ 与之对应, 而且保持 G 的乘法不变. 即对 $g_\alpha,g_\beta\in G$, 有

$$A\left(g_\alpha g_\beta\right)=A\left(g_\alpha\right)A\left(g_\beta\right).$$

如在表示空间 V 选一组基, 线性变换群就和矩阵群同构. 因此群 G 在表示空间 V 的线性表示也可定义为 G 到 $n\times n$ 矩阵群的同态映射 A:$\forall g_\alpha\in G$, 有非奇异矩阵 $A\left(g_\alpha\right)$ 与之对应, 且对 $g_\alpha,g_\beta\in G$, 矩阵乘法保持 $A\left(g_\alpha g_\beta\right)=A\left(g_\alpha\right)A\left(g_\beta\right)$.

G 的单位元素 g_0 对应 n 级单位矩阵 $E_{n\times n}$, 互逆元素 g_α 和 g_α^{-1}, 对应互逆矩阵 $A(g_\alpha^{-1})=A(g_\alpha)^{-1}$.

Corollary 2.1. *若一个群元 g_β 的表示矩阵 $A(g_\beta)$ 是奇异的, 即 $\det A(g_\beta)=0$, 则所有群元的表示矩阵奇异.*

群 G 到 $L(V,C)$ 的同态, 既可以看成是到 V 上线性变换群的同态, 也可以看成是在表示空间 V 中取一组基后,G 到矩阵群的同态.

Definition 2.5 (忠实表示)**.** *如果群 G 到群 $L(V,C)$ 的映射不仅同态而且同构, 即 $\forall g_\alpha\in G$ 有唯一的 $A\left(g_\alpha\right)\in L(V,C)$ 与之对应, 反之 $\forall A\left(g_\alpha\right)\in L(V,C)$ 也唯一对应 $g_\alpha\in G$, 则称此表示 A 为忠实表示.*

对于两个同构的群 $G\cong G'$, 若 A 是 G 的一个表示, 则 A 必是 G' 的一个表示. G 和 G' 可能代表完全不同的物理意义, 表示 A 在 G 中和 G' 中代表的意义也可能完全不同.

Example (几个常见的表示)**.**

(1). 任何群 G 恒与 $\{1\}$ (一阶单位矩阵)[13], $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ 等单位矩阵同态.

(2). 任何矩阵群都是自身的表示, 且为忠实表示.

(3). 在求群表示矩阵的时候, 要做的就是把每个基矢进行变换, 然后按旧基展开, 展开系数为表示矩阵的列. 如下面这个例子:

[13]称为一维恒等表示或显然表示、平凡表示.

设表示空间为三维实空间, 取基矢为 $\{\hat{i},\widehat{j},\widehat{k}\}$, 则绕 z 轴的转动群 $\{\mathrm{C}_{\boldsymbol{k}}(\varphi)\}$ 的表示为

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4). 当表示空间的基为函数, 而抽象群群元为其变量的变换时, 函数变换满足的规律是:

$$A\left(g_\alpha\right)\Psi_i(\boldsymbol{r}) = \Psi_i\left(g_\alpha^{-1}\boldsymbol{r}\right).$$

如果选 x,y,z 的二次齐次函数

$$\begin{aligned} &\phi_1 = x^2, \quad \phi_2 = y^2, \quad \phi_3 = z^2 \\ &\phi_4 = xy, \quad \phi_5 = yz, \quad \phi_6 = xz \end{aligned}$$

作为表示空间的基, 则 D_3 群的表示为

$$A(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A(f) = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A(d) = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$A(b) = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

和

$$A(c) = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2.2. 等价表示、不可约表示和酉表示

Definition 2.6 (等价表示)**.** *设群 $G = \{g_\alpha\}$ 在表示空间 V 的表示为 $A = \{A(g_\alpha)\}$, 对应每一个 g_α 有唯一非奇异线性变换 $A(g_\alpha)$ 与之对应. 在一组基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 下, $A(g_\alpha)$ 就是与 g_α 对应的非奇异矩阵. 设 X 是 V 上非奇异矩阵, $\det X \neq 0$, 则相似矩阵集合 $\left\{XA(g_\alpha)X^{-1}\right\}$ 也给出群 G 的一个表示, 称为 $\{A(g_\alpha)\}$ 的等价表示.*[14]

两个等价表示的维数一定相同, 但维数相同的表示却不一定等价. 一个表示, 原则上存在无穷多个等价表示.

等价表示本质上是由相似变换联系起来的线性变换群. 在同一组基下也可以说它们体现为由相似变换矩阵联系起来的矩阵群.

Definition 2.7 (可约表示)**.** *设 A 是群 G 在表示空间 V 上的一个表示. 如果 V 存在一个 G 不变的真子空间 W (即 W 不是空集或 V 本身), 则称表示 A 是可约表示, 亦即 $\forall y \in W, g_\alpha \in G$, 有 $A(g_\alpha)y \in W$. $A(g_\alpha)$ 不把 W 中的向量变到 W 以外去.*

也可以从表示矩阵具有以下形式来定义可约表示. 当 V 中存在 G 不变的真子空间 W 时, 总可以在 V 中选一组基 $(e_1, e_2, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$, 其中 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 是 W 的基, 使得 $\forall g_\alpha \in G, A(g_\alpha)$ 具有如下形式:

$$A(g_\alpha) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\ \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} & \begin{pmatrix} C_\alpha & N_\alpha \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix} \end{array}.$$

W 中的向量具有 $y = \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$ 的形式. 即 $A(g_\alpha)$ 不会使 W 中向量变到 W 外去.

一个表示, 只要有一个等价表示矩阵具有上述形式, 这表示就是可约的, 而这表示本身并不一定具有上面的形式. 因为只有通过适当选择基, 才可以把 W 是 G 的不变子空间的性质用以上矩阵形式表示出来.

Definition 2.8 (直和)**.** *设 W 和 W' 是线性空间 V 的子空间, 若 $\forall x \in V$, 可找到*

[14] 当两个表示对应的表示空间不一样, 但对应的表示矩阵群可以通过一个不依赖于 g_α 的非奇异变换 X, 由 $X^{-1}A(g_\alpha)X$ 联系起来的时候, 它们也等价.

$y \in W, z \in W'$ 唯一的将 x 表为 $x = y + z$，或 $V = W + W', \quad W \cap W' = \{\emptyset\}$，则称 V 是线性空间 W 和 W' 的直和，记为 $V = W \oplus W'$.

Definition 2.9 (完全可约表示). 设群 G 的表示空间 V 可以分解为 W 和 W' 的直和:$V = W \oplus W'$, 且 W 和 W' 都是 G 不变的. 即 $\forall y \in W, z \in W'$, V 上表示 A 有 $A(g_\alpha) y \in W, A(g_\alpha) z \in W'$, 则称表示 A 是完全可约表示.

对完全可约表示 A, 总可以取一组基 $(e_1, e_2, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$, 使得 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 和 $(e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$ 是 W 和 W' 的基.W 和 W' 中向量具有形式:

$$y = \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix}$$

表示矩阵 $A(g_\alpha)$ 具有形式:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\ \begin{array}{c} m\text{行} \\ n\text{行} \end{array} & \begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix} \end{array} = C(g_\alpha) \oplus B(g_\alpha),$$

即 $A(g_\alpha)$ 是矩阵 $C(g_\alpha)$ 和 $B(g_\alpha)$ 的直和.

Definition 2.10 (重复度). 一般完全可约表示 $A(g_\alpha)$ 可以写为不可约表示 $A'(g_\alpha)$ 的直和[15]

$$A(g_\alpha) = \sum_p \oplus m_p A'(g_\alpha),$$

其中 m_p 是正整数, 是表示 $A'(g_\alpha)$ 在 $A(g_\alpha)$ 中出现的次数, 称为重复度.

也可以从表示矩阵具有准对角形式来定义完全可约表示, 当表示 A 有一个等价表示矩阵具有以上形式, 则称 A 是完全可约表示. 如果一个表示是可约的但不是完全可约的, 则称为可约而不完全可约表示.

Definition 2.11 (不可约表示). 设群 G 的表示 A 的表示空间 V 不存在 G 不变的真子空间, 则 A 是 G 的不可约表示或既约表示.

如果 A 是不可约表示, 那么 A 的任何一个等价表示 $A(g_\alpha)$ 对所有的 $g_\alpha \in G$ 都不具备 $\begin{pmatrix} C_\alpha & N_\alpha \\ 0 & B_\alpha \end{pmatrix}$ 的形式, 也不具有准对角 $\begin{pmatrix} C(g_\alpha) & N_\alpha \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix}$ 的形式.

Definition 2.12 (内积). 设 V 是数域 K 上线性空间, 将 V 中两个有序向量 x, y 映为数 $(x \mid y) \in K$, 对 $x, y, z \in V, a \in K$, 如满足

(1). $(x + y \mid z) = (x \mid z) + (y \mid z)$,

[15]所以说, 对任何群, 求其全部不等价不可约表示是群表示论的主要课题.

(2). $(x \mid ay) = a(x \mid y)$,

(3). $(x \mid y) = (y \mid x)^*$,

(4). $(x \mid x) > 0$, 当 $x \neq 0$,

则数 $(x \mid y)$ 称为 x 和 y 的内积.

Definition 2.13 (内积空间)**.** 内积空间是定义有内积的线性空间. 在内积空间中, 定义向量 x 的长度 $|x| = \sqrt{(x \mid x)}$. 若两向量 x, y 的内积 $(x \mid y) = 0$, 称 x 与 y 垂直. 总可以在内积空间中选择基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 满足正交归一性:$(e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$.

内积空间举例:

- 欧氏空间: 有限维实内积空间;
- 酉空间: 有限维复内积空间;
- 希尔伯特空间: 无限维复内积空间.

Definition 2.14 (幺正变换)**.** 设 U 是内积空间 V 上线性变换, 若 $\forall x, y \in V, U$ 保持 x 和 y 的内积不变, 即 $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$, 则称 U 为 V 上幺正变换.

内积空间 V 上线性变换 A 的共轭变换 $A^\dagger$ 定义为 $\forall x, y \in V$ 有 $(Ax|y) = (x|A^\dagger y)$. 因此幺正变换 U 满足:

$$(Ux|Uy) = (x|U^\dagger Uy) = (x|y).$$

所以幺正变换 U 存在逆变换 U^{-1}, 满足:

$$U^\dagger U = UU^\dagger = E, U^\dagger = U^{-1},$$

其中,E 是 V 上的恒等变换. 在 V 的一组固定基下,U 用幺正矩阵 (U_{ij}) 表示, 满足 $U^{*T}U = E$.

Definition 2.15 (酉表示)**.** 设 A 是群 G 在内积空间 V 上的表示, 若 A 是 V 上幺正变换, 则 A 称为 G 的酉表示, 亦即 A 是 G 到 V 上幺正交换群的同态映射:$\forall g_\alpha, g_\beta \in G$, 有 $A(g_\alpha), A(g_\beta)$ 与之对应, 而且

$$\begin{aligned} A(g_\alpha g_\beta) &= A(g_\alpha) A(g_\beta), \\ A(g_\alpha)^\dagger &= A(g_\alpha)^{-1} = A(g_\alpha^{-1}), \\ A(g_\beta)^\dagger &= A(g_\beta)^{-1} = A\left(g_\beta^{-1}\right). \end{aligned}$$

在取一组正交归一基下, $A(g_\alpha)$ 表为矩阵, 则

$$A(g_\alpha)^*_{ji} = \left[A(g_\alpha)^{-1}\right]_{ij} = A(g_\alpha^{-1})_{ij}.$$

Theorem 2.1. *酉表示可约则完全可约. 即群 G 的表示 A 是可约酉表示, 则 A 是完全可约的.*

适当选择 V 的正交归一基,$A(g_\alpha)$ 矩阵具有如下形式:

$$
A(g_\alpha) = \begin{array}{c} \\ m\text{行} \\ n\text{行} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} m\text{列} & n\text{列} \end{array} \\
\begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\dim W = m, \dim W^{\perp} = n - m
$$

或者说 $A(g_\alpha)$ 具有等价矩阵

$$
XA(g_\alpha)X^{-1} = \begin{pmatrix} C(g_\alpha) & 0 \\ 0 & B(g_\alpha) \end{pmatrix}.
$$

Corollary 2.2. *有限维酉表示可以分解为不可约酉表示的直和.*

2.3. 群代数和正则表示

群本来只定义了乘法运算, 如果以群元为基, 它们的线性组合为向量, 在群中再附加上数乘和加法两种运算 (满足相应的 8 条规则), 群就成为了一个线性空间, 称之为群空间. 进一步定义群空间中向量的乘法 (满足相应的规则), 则可定义群代数. 通过群代数, 群中任意元素被映射为群空间的一个向量, 或者说映射为群空间的一个线性变换 (群代数的封闭性保证了这一点), 这些线性变换组成的群自然而然就是一个表示, 称之为正则表示. 正则表示矩阵与抽象群群元存在一一对应的关系, 这对剖析群的结构很有用处.

Definition 2.16 (代数)**.** *R 是数域 K 上的线性空间, 在 R 中可定义乘法且对 $x, y, z \in R, a \in K$ 如满足:*

(1). $xy \in R$,

(2). $x(y + z) = xy + xz, (x + y)z = xz + yz$,

(3). $a(xy) = (ax)y = x(ay)$,

则称 R 为线性代数或代数. 当 $(xy)z = x(yz)$ 时, 称为可结合代数或结合代数.

Definition 2.17 (群空间)**.** *设 $\mathbb{C}$ 是复数域, $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_\alpha, \cdots\}$ 是群. 群 G 原来只有乘法运算, 若进一步定义加法和数乘, 即对任意 $x = \sum_\alpha x_\alpha g_\alpha, y = \sum_\alpha y_\alpha g_\alpha; x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{C}$, 满足*

$$
x + y = \sum_\alpha (x_\alpha + y_\alpha) g_\alpha,
$$

$$
ax = \sum_\alpha (a x_\alpha) g_\alpha,
$$

则 $x=\sum\limits_{\alpha} x_\alpha g_\alpha$ 的全体构成一个线性空间 V_G, 称为群空间. 群元 $g_1, g_2, \cdots, g_\alpha, \cdots$ 称为 V_G 的自然基底.

Definition 2.18 (群代数)**.** 设 $g_\alpha, g_\beta, g_y \in G, g_\alpha g_\beta = g_\gamma$, 对 $x, y \in V_G$, 其中

$$x=\sum_{\alpha} x_\alpha g_\alpha, y=\sum_{\beta} y_\beta g_\beta,$$

定义 x, y 的乘积为

$$xy=\sum_{\alpha} x_\alpha g_\alpha \sum_{\beta} y_\beta g_\beta=\sum_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \left(g_\alpha g_\beta\right)=\sum_{\gamma}(xy)_\gamma g_\gamma,$$

其中 $(xy)_\gamma=\sum\limits_{\alpha} x_\alpha y_{\alpha^{-1}\gamma}$, 而 $y_{\alpha^{-1}\gamma}$ 是向量 y 在 $g_\alpha^{-1} g_\gamma$ 上分量.[16] 这样定义的乘法显然满足条件

$$(ax+y)z=a(xz)+(yz), \forall a \in \mathbb{C};$$
$$(xy)z=x(yz), x, y, z \in V_G.$$

在以上乘法定义下, 群空间 V_G 构成一个结合代数, 称为 G 的群代数, 记为 R_G.R_G 的维数就是 G 的阶.

Definition 2.19 (正则表示 (正规表示))**.** 若取群代数 R_G 作为群 G 的表示空间, $\forall g_i \in G$ 可以映为 R_G 上线性变换 $L(g_i)$, 定义 $L(g_i)$ 为 $L\left(g_i\right) g_j=g_i g_j=g_k; g_j, g_k \in R_G$. 则

$$L(g_i)L(g_j)g_k=L(g_i)g_j g_k=g_i g_j g_k=L(g_i g_j)g_k.$$

$L(g_i)$ 映射保持 G 的乘法不变, 称为群 G 的*(左)正则表示*. 当 G 是 n 阶有限群时,$L(g_i)$ 是 n 维表示.

由重排定理, 只要 $g_i \neq g_j$,$L(g_i)$ 和 $L(g_j)$ 就不同, 故正则表示是 G 的忠实表示. 按照以上定义的 $L(g_i)$ 是从左边作用于群元, 也称为左正则表示.

如果把任意 $g_i \in G$ 映为群代数上线性变换 $R(g_i)$ 定义为 $R(g_i)g_j=g_j g_i^{-1}=g_l \quad g_j, g_l \in R_G$, 则 $R(g_i)$ 映射也保持群 G 的乘法不变:

$$R(g_i)R(g_j)g_k=R(g_i)g_k g_j^{-1}=g_k g_j^{-1} g_i^{-1}=g_k(g_i g_j)^{-1}=R(g_i g_j)g_k.$$

因此 $R(g_i)$ 也是群 G 的表示, 表示空间也是 R_G, 称为 G 的右正则表示.

Example (正则表示的几个例子)**.**

(1). 二阶循坏群 $Z_2=\{e, a\}$, 群空间中的基为 $|e\rangle, |a\rangle$.$L(e)|e\rangle=ee=1|e\rangle+0|a\rangle, L(e)|a\rangle=ea=0|e\rangle+1|a\rangle, L(a)|e\rangle=ae=0|e\rangle+1|a\rangle, L(a)|a\rangle=aa=1|e\rangle+0|a\rangle$. 所以线性变换所

[16] 对于第二种求和方式, 求和指标是在 x 的分量指标上, 在 g_α 走遍群 G 中所有元素的时候, 与它相乘的 y 向量只取 $g_\alpha^{-1} g_\gamma$ 这个分量上的系数进行相乘, 以保证乘完的结果是 g_γ 这个群元.

对应的矩阵群为:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Z_2 是个二阶群, 这个线性变换群也是一个二阶群, 表示为忠实表示.

(2). D_3 群的左正则表示中, a 对应的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. 有限群表示理论

Theorem 2.2 (Schur 引理一)**.** *设群 G 在有限维向量空间 V_A 和 V_B 上有不可约表示 A 和 B, 若 $\forall g_\alpha \in G$, 有将 V_A 映入 V_B 的线性变换 M 满足 $B(g_\alpha)M = MA(g_\alpha)$, 则有*

(1). 当表示 A 和 B 不等价时, 必有 $M \equiv 0$.

(2). 当 $M \neq 0$ 时, 表示 A 和表示 B 必定等价.

Schur 引理一说的直接一点就是, **两个不等价不可约表示, 不可能通过一个非零的线性变换 M, 由 $MA(g_\alpha) = B(g_\alpha)M$ 联系起来.**

Theorem 2.3 (Schur 引理二)**.** *设 A 是群 G 在有限维复表示空间[17] V 的不可约表示, 若 V 上的线性变换 M 满足*

$$A(g_\alpha)M = MA(g_\alpha), \forall g_\alpha \in G,$$

则 $M = \lambda E$. 即 M 是 V 上恒等变换 E 乘上常数 $\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.

这个定理是在说, **与不可约表示任意一个表示矩阵都互易的矩阵必为常数矩阵.** Schur 引理也可直接看成对表示矩阵而言, 所以它是关于矩阵的定理.

Theorem 2.4. *有限群在内积空间的每一个表示都有等价的酉表示.*

Corollary 2.3. *有限群在内积空间的表示可约则完全可约.*

Corollary 2.4. *有限群在内积空间的表示, 或是不可约的, 或等价于几个不可约表示的直和.*

[17] Schur 引理二只适用于复表示 A, 对实表示不一定成立.

有限群可约则完全可约, 这样对任何内积空间中的有限群的表示, 可以先把它化为不可约表示的直和, 然后利用这些不可约表示都有等价酉表示的性质, 把它们化为相互之间不等价的不可约酉表示. 这样最终面对的, 都是不等价不可约的酉表示.

Definition 2.20 (群函数)**.** 设 R_G 是群 $G=\{g_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 的代数, 则 R_G 中任意向量 x 可以看成是群元 g_i 的函数, 如

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} x_i g_i=\sum_{i=1}^{\infty} x\left(g_i\right) g_i,$$

R_G 中向量 x 和复函数 $x\left(g_i\right)$ 间有一一对应关系. 复函数全体构成一个与 R_G 同构的代数. 对 $a \in \mathbb{C}$, 群函数 $x\left(g_i\right)$ 和 $y\left(g_i\right)$ 有数乘, 加法和乘法如下,

$$\begin{aligned}
(a x)\left(g_i\right) & =a x\left(g_i\right) \\
(x+y)\left(g_i\right) & =x\left(g_i\right)+y\left(g_i\right) \\
(x y)\left(g_i\right) & =\sum_j x\left(g_j\right) y\left(g_j^{-1} g_i\right)
\end{aligned}$$

G 的复函数空间的 n 个基可选为下列 n 个函数,

$$g_1\left(g_j\right)=\delta_{1 j}, g_2\left(g_j\right)=\delta_{2 j}, \cdots, g_n\left(g_j\right)=\delta_{n j},$$

即共有 n 个独立的群函数.

群函数空间中不光群函数与群代数中的向量一一对应, 它们之间的加法、数乘、向量 (函数) 乘法也是一致的. 因此可以把群函数与群代数中的向量一一对应起来.

群函数空间也是 n 维的, 在这个 n 维的函数空间中, 与群空间向量内积对应, 如果定义两个函数 x, y 的内积为

$$(x \mid y)=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^*\left(g_i\right) y\left(g_i\right),$$

那么这个群函数空间就构成了一个内积空间. 用群元所对应的群函数作基, 它们之间的内积正交, 但不归一, 即

$$\left(g_i \mid g_j\right)=\frac{1}{n} \delta_{i j}$$

那么这个群函数空间就构成了一个内积空间. **正则表示在这样的内积定义下**

是一个酉表示:

$$\begin{aligned}
(L(g_k)x \mid L(g_k)\boldsymbol{y}) &= \left(L(g_k)\sum_{i=1}^{n} x(g_i)g_i \mid L(g_k)\sum_{j=1}^{n} y(g_j)g_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x(g_i)L(g_k)g_i \mid \sum_{j=1}^{n} y(g_j)L(g_k)g_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x(g_i)g_kg_i \mid \sum_{j=1}^{n} y(g_j)g_kg_j\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^*(g_i)\boldsymbol{y}(g_i) = (x \mid y).
\end{aligned}$$

对一个群 G 的 s 维表示 A, 它的矩阵元 $A_{\mu\nu}(g_i)$ 是一个群函数. 这个表示有 s^2 个矩阵元, 可以给出 s^2 个群函数. 群函数空间的群函数自由度为群的阶数 n. 不等价不可约酉表示的正交性与完备性定理, 实际上就是有限群不等价不可约酉表示的矩阵元作为群函数在群函数空间的正交性与完备性.

Theorem 2.5 (正交性定理)**.** *设有限群 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$ 有不等价不可约酉表示 $\cdots,A^p,\cdots,A^r,\cdots$, 其维数分别为 $\cdots,S_p,\cdots,S_r,\cdots$, 则有*

$$\sum_{i=1}^{n} A^p_{\mu\nu}(g_i)^* A^r_{\mu'\nu'}(g_i) = \frac{n}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'},$$

或者用 R_G 中的内积表示为

$$\left(A^p_{\mu\nu} \mid A^r_{\mu'\nu'}\right) = \frac{1}{S_p}\delta_{pr}\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'}.$$

即不可约表示 A^p 和 A^r 若是不等价的, 则它们生成的群函数中 $A^p_{\mu\nu}$ 与 $A^r_{\mu'\nu'}$ 是正交的, 而 $A^p_{\mu\nu}$ 与自身的内积等于 $1/S_p$.

这里正交性存在于三个指标上, 分别是不等价不可约酉表示的指标 $p(r)$, 矩阵行的指标 $\mu(\mu')$, 矩阵列的指标 $\nu(\nu')$. [18] $A^p_{\mu\nu}$ 这个群函数与其自身内积为 $\dfrac{1}{S_p}$.

Theorem 2.6 (完备性定理)**.** *设 $A^p(p=1,2,\cdots,q)$ 是有限群 $G=\{g_1,\cdots,g_i,\cdots,g_n\}$ 的所有不等价不可约酉表示, 则 A^p 生成的群函数 $A^p_{\mu\nu}(g_i)$ 在群函数空间中是完备的.*

由完备性定理和正交性定理可知, $\sqrt{S_p}\left(A^p_{\mu\nu}(g_i)g_i\right)$ 构成了群函数空间中正交归一的完备基, 所有的群函数都可以按这个基来进行展开.

Corollary 2.5 (Burside 定理)**.** *有限群的所有不等价不可约酉表示维数的平方和, 等*

[18] r,p 是不等价不可约酉表示的指标, S_r 与 S_p 是它们的维数, r 与 S_r, p 与 S_p 并不需要相等.

于群的阶. 即

$$S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_q^2 = n.$$

Corollary 2.6. 正则表示 $L(g_i)$ 按不等价不可约酉表示 $A^p(g_i)$ 可约化为

$$L(g_i) = \sum_{i=1}^{q} \oplus S_p A^p(g_i).$$

正则表示含不等价不可约酉表示的次数等于该表示的维数.

2.5. 群表示的特征标理论

Definition 2.21 (特征标)**.** 设 $A = \{A(g_a)\}$ 是群 $G = \{g_a\}$ 的一个表示, 群 G 表示 A 的特征标定义为 $\{\chi(g_a)\}$, 其中

$$\chi(g_a) = \operatorname{tr} A(g_a) = \sum_{\mu} A_{\mu}(g_a),$$

即表示矩阵 $A(g_a)$ 对角线上元素的和 $\chi(g_a)$ 为元素 g_a 的特征标.

Corollary 2.7. 等价表示的特征标相同.

Corollary 2.8. 同一表示 A 中, 共轨元素的特征标相等.

Corollary 2.9. 设 K_α 是群 G 中含元素 g_α 的一个类, 那么 K_α 中所有元素的特征标相同, 即 χ 是类的函数.

不同类元素可以有不同的特征标, 也可以有相同的特征标, 但同一个类中的元素, 特征标必须相同.

Corollary 2.10. G 中单位元素自成一类, 由于它与单位矩阵对应, 所以特征标等于维数.

Theorem 2.7 (特征标的第一正交关系.)**.**

$$(\chi^p \mid \chi^r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi^p(g_i)^* \chi^r(g_i) = \delta_{pr}.$$

Corollary 2.11. 一个不可约表示与其自身做特征标内积结果为 1.

Corollary 2.12. 可约表示 A 的特征标 χ^A 的内积大于 1, 即

$$(\chi^A \mid \chi^A) = \sum_{p=1} m_p^2 > 1.$$

Corollary 2.13. 一个可约表示中某个不可约表示的重复度, 可由这个可约表示与

这个不可约表示的内积给出, 即

$$\left(\chi^{A^p} \mid \chi^{B}\right) = \left(\chi^{A^p} \mid \sum_{p'=1}^{q} \oplus m_{p'} \chi^{A^{p^p}}\right) = m_p.$$

Theorem 2.8. 有限群的所有不等价不可约表示的持征标, 在类函数空间[19]是完备的.

这个定理是在说, **类函数的空间维数等于不等价不可约表示的个数.** 于是就有

Theorem 2.9. 有限群的不等价不可约表示的个数等于群的类的个数.

Theorem 2.10 (特征标的第二正交关系)**.**

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{q} n_i \chi^{p*}(K_i)\,\chi^{p}\left(K_j\right) = \delta_{ij}.$$

特征标表的第一个轴是有限群的类, 第二个轴是群的不等价不可约表示指标. 因为类数等于不等价不可约表示数, 所以由这两个轴做出的表的行数和列数是相同的, 都等于有限群的类的个数. 如表 2.1 所示, 这个表的每一列记为 $n_i\{K_i\}$, 其中 $\{K_i\}$ 是类, n_i 是其中元素个数. 而每一行记为 A^p , 是不等价不可约表示的指标. 在这里行列之间都有正交, 对应的就是特征标的两个正交定理.

Table 1. 特征标表示意图

	$n_1\{K_1\}$	$n_2\{K_2\}$	$\cdots$	$n_q\{K_q\}$
A^1	$\chi^1(K_1)$	$\chi^1(K_2)$	$\cdots$	$\chi^1(K_q)$
A^2	$\chi^2(K_1)$	$\chi^2(K_2)$	$\cdots$	$\chi^2(K_q)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A^q	$\chi^q(K_1)$	$\chi^q(K_2)$	$\cdots$	$\chi^q(K_q)$

Example (n 阶循环群的表示)**.** n 阶循环群 $\left\{a, a^2, \cdots, a^n = e\right\}$ 是 Abel 群, 有 n 个类, 所以每个不等价不可约表示都是一维的. $A(a)$ 是 a 的表示, 是一个数, 满足 $(A(a))^n = 1$. 所以 $A(a)$ 可以是 $\exp[2\pi\mathrm{i} * (p-1)/n]$, 其中 i 是虚部因子, p 是不等价不可约表示的指标, 从 1 到 n.

$n = 4$ 时对应的特征标表如2所示:

Example (D_3 群的特征标表)**.**

[19]类函数空间的维数就是这个群中类的个数.

Table 2. 四阶循环群特征标表

	$1\{e\}$	$1\{a\}$	$1\{a^2\}$	$1\{a^3\}$
A^1	1	1	1	1
A^2	1	i	-1	$-i$
A^3	1	-1	1	-1
A^4	1	$-i$	-1	i

Table 3. D_3 群特征标表

	$1\{e\}$	$2\{d\}$	$3\{a\}$
A^1	1	1	1
A^2	1	1	-1
A^3	2	-1	0

Corollary 2.14. *两个表示等价的充要条件是它们的特征标相等.*

2.6. 新表示的构成

Definition 2.22 (矩阵的直积)**.** *一个 $n \times n$ 的矩阵 $A = (a_{ik})$ 和一个 $m \times m$ 的矩阵 $B = (b_{jl})$ 的直积记为 $C = A \otimes B$, 它的群元为 $c_{ij,kl} = (a_{ik} b_{jl})$. 这是一个 $(n \times m) \times (n \times m)$ 的矩阵, 行指标为 ij, 列指标为 kl. 即*

$$A \otimes B = C = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

直积矩阵具有如下的性质:

(1). 两个单位矩阵的直积是单位矩阵;

(2). 两个对角矩阵的直积是对角矩阵;

(3). 两个酉矩阵的直积仍为酉矩阵;

(4). 若 $A^{(1)}$ 与 $A^{(2)}$ 是阶相同的矩阵, $B^{(1)}$ 与 $B^{(2)}$ 是阶相同的矩阵, 则

$$\left(A^{(1)} \otimes B^{(1)}\right)\left(A^{(2)} \otimes B^{(2)}\right) = \left(A^{(1)} A^{(2)}\right) \otimes \left(B^{(1)} B^{(2)}\right).$$

Definition 2.23 (直积表示)**.** *群 G 有两个表示 A 与 B, 做表示矩阵的直积 $C(g_\alpha) =$*

$A\left(g_\alpha\right)\otimes B\left(g_\alpha\right)$，这个直积矩阵群保持群的乘法规律不变,[20] 这时 C 也是群 G 的一个表示, 称为 A 表示与 B 表示的直积表示.

Corollary 2.15. 直积表示的特征标等于其因子的特征标的乘积, 即

$$\chi^C\left(g_\alpha\right)=\chi^A\left(g_\alpha\right)\chi^B\left(g_\alpha\right).$$

两个不可约表示的直积可能可约, 也可能不可约.

Definition 2.24 (直积群的表示)**.** 群 G 是另外两个群 G_1 与 G_2 的直积, G_1 与 G_2 分别有表示 A 与 B. 根据直积分解规则, $C\left(g_{1\alpha}g_{2\beta}\right)=A\left(g_{1\alpha}\right)\otimes B\left(g_{2\beta}\right)$ 构成群 G 的表示. 这个表示称为 G_1 与 G_2 直积群的表示.

如果 A 与 B 是 G_1 与 G_2 的不可约表示, 那么 $A\left(g_{1\alpha}\right)\otimes B\left(g_{2\beta}\right)$ 对应的 G 的表示也不可约.

Definition 2.25 (诱导表示)**.** 设 H(阶为 m) 是群 G(阶为 n) 的子群, 其在表示空间 W 上的表示为 $B(h)$, 则群 G 的诱导表示为

$$\forall g\in G, U(g)=\begin{pmatrix}\dot{B}\left(g_1gg_1^{-1}\right) & \dot{B}\left(g_1gg_2^{-1}\right) & \cdots & \dot{B}\left(g_1gg_l^{-1}\right)\\ \dot{B}\left(g_2gg_1^{-1}\right) & \dot{B}\left(g_2gg_2^{-1}\right) & \cdots & \dot{B}\left(g_2gg_l^{-1}\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dot{B}\left(g_lgg_1^{-1}\right) & \dot{B}\left(g_lgg_2^{-1}\right) & \cdots & \dot{B}\left(glgg_l^{-1}\right)\end{pmatrix},$$

其中

$$\dot{B}\left(g_mgg_j^{-1}\right)=\begin{cases}B\left(g_mgg_j^{-1}\right), & \text{当}\, g_mgg_j^{-1}\in H,\\ 0, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

而 $g_1,\cdots,g_l$ 是 G 依据 H 进行陪集分解的时候用到的 H 外的那些群元, 并且 $l=n/m$.

Corollary 2.16. 设 m 与 n 分别为子群 H 与群 G 的阶,t 为 G 的所有群元, 在 G 中与 g 同类的元素共有 n_g 个, 记为 K_g 类, 则诱导表示的特征标为

$$\chi^U(g)=\sum_{j=1}^{l}\operatorname{tr}\dot{B}\left(g_jgg_j^{-1}\right)=\frac{1}{m}\sum_{t\in G}\operatorname{tr}\dot{B}\left(tgt^{-1}\right)=\frac{n}{mn_g}\sum_{g\in K_g}\operatorname{tr}\dot{B}(g),$$

[20] 因为 $\forall g_\alpha,g_\beta\in G$，有

$$\begin{aligned}C\left(g_\alpha\right)C\left(g_\beta\right)&=\left(A\left(g_\alpha\right)\otimes B\left(g_\alpha\right)\right)\left(A\left(g_\beta\right)\otimes B\left(g_\beta\right)\right)\\&=\left(A\left(g_\alpha\right)A\left(g_\beta\right)\right)\otimes\left(B\left(g_\alpha\right)B\left(g_\beta\right)\right)\\&=A\left(g_\alpha g_\beta\right)\otimes B\left(g_\alpha g_\beta\right)\\&=C\left(g_\alpha g_\beta\right).\end{aligned}$$

其中 $l = n/m$.

Definition 2.26 (群表示在子群上的缩小). 设 A 是群 G 的一个表示, $\forall g \in G$, 都有一个线性变换 $A(g)$ 与之对应, 且有 $A(g_1 g_2) = A(g_1) A(g_2)$. 那么这个对应关系对 G 的子群 H 中的元素自然也成立, 即 $\forall h \in H \subset G$, 都有一个线性变换 $A(h)$ 与之对应, 且有 $A(h_1 h_2) = A(h_1) A(h_2)$. 也就是说线性变换群 $\{A(h)\}$ 形成了 G 的子群 H 的一个表示. 把这样的一个表示称为 G 的表示 A 到其子群 H 的缩小, 记为 $A|_H$.

Theorem 2.11 (Frobenius 定理). 设 A, B 分别是群 G 和其子群 H 的不可约表示; 则 A 在 $_H U^B$ 中的重复度等于 B 在 $A|_H$ 中的重复度.